Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. 48, 1912-13.
Adunanza del 13 aprile 1913.

Sulla definizione di limite.

Nota del Socio GIUSEPPE PEANO

Saluti cordiali.

Il presente scritto è uno studio critico comparativo di alcune definizioni di limite, quali trovansi nei trattati ad uso delle scuole secondarie e universitarie. L'occasione a questa raccolta di definizioni fu una discussione fra alcuni colleghi sulla convenienza, o meno, di introdurre nelle scuole secondarie la derivata d'una funzione. Questa innovazione già fu fatta o tentata all'estero; in Italia, i " Programmi di Matematica, proposti per i licei moderni ", pubblicati nel " Bollettino della Mathesis ", dicembre 1912, con prefazione del prof. G. Castelnuovo, della R. Università di Roma, contengono appunto, per la II Classe: " Concetto di limite. Tangente ad una curva. Lunghezza d'un arco e derivata d'una funzione ". E per la III Classe: " Cenno sull'integrale definito ".

***

Il " Formulario Mathematico ", edizione del 1906-08, contiene la seguente definizione del limite d'una successione:

Definizione I.

$$x \epsilon \mathrm{q F N_1} \,.\, a \epsilon \mathrm{q} \,.\, \supset \therefore a = \lim x \,.=:\, h \epsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_h .\, \exists \mathrm{N_1} \cap m \ni [n \epsilon \mathrm{N_1} \,.\, \supset_n .\, \mathrm{mod}\,(x_{m+n} - a) < h].$$

" Se x è una quantità funzione dei numeri naturali (ossia se $x_1\ x_2\ x_3$ ... sono quantità, o se x è una successione di quantità); e se a è una quantità (determinata e finita), allora dire che a è il limite di x, significa dire che, comunque si prenda la quantità positiva h, ne risulta che si può prendere un numero m tale che, comunque si prenda il numero n, sempre si ha che il valor assoluto di $x_{m+n} - a$ sia minore di h ".

La parte aritmetica della definizione è:

$$\mathrm{mod}\,(x_{m+n} - a) < h\,,$$

che contiene i soli segni $+$, $-$, $<$, mod. Sicchè la definizione si può dare anche prima della moltiplicazione dei numeri reali.

Sotto l'aspetto logico, la definizione ha un'ipotesi, che precisa il significato delle lettere x ed a: x è una successione di quantità, ed a è una quantità finita. Il primo membro, il definito, è tutta l'eguaglianza $a = \lim x$, che contiene le variabili reali a ed x. Il secondo membro poi, o definiente, contiene, oltre alle variabili reali x ed a, tre variabili apparenti h, m, n, rispettivamente accompagnate dai simboli Ɔ, ∃, Ɔ; o nel linguaggio comune " per ogni h, e per qualche m, e per ogni n "; cioè la proposizione è universale in h, particolare in m, ed universale in n.

Non è permesso di invertire l'ordine delle tre lettere h, m, n; nè di scambiare i segni Ɔ ed ∃, senza alterare il senso del definiente.

La definizione precedente di limite è ben nota, e fa parte di tutti i buoni trattati. Eccone un esempio:

Baire, *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité,* pag. 18.

" *On dit que la suite*

(1) $$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

a pour limite le nombre λ, *si, quels que soient les nombres* λ *et* λ′ *satisfaisant aux conditions*

$$\lambda' < \lambda < \lambda''$$

il y a un entier p *tel que, pour* $\mathrm{n} > \mathrm{p}$, *on a*

$$\lambda' < u_n < \lambda'' \text{ ''}.$$

Basta, al posto di u, λ, λ', λ'', p, n leggere x, a, $a - h$, $a + h$, m, $m + n$, per avere la definizione I.

Alcuni autori preferiscono cominciare dal caso particolare in cui il limite è zero:

Definizione II.

$$x \epsilon \mathrm{q F N_1} . \supset .\because \lim x = 0 . = : h \epsilon \mathrm{Q} . \supset_h . \exists \mathrm{N_1} \frown m \ni [n \epsilon \mathrm{N_1} . \supset_n . \mathrm{mod}\, x_n < h].$$

Da essa si risale al limite generale colla definizione:

$$x \epsilon \mathrm{q F N_1} . a \epsilon \mathrm{q} . \supset : \lim x = a . = . \lim (x_n - a) | n = 0.$$

Così fa Cesàro, *Introduzione al Calcolo infinitesimale*:

" Si dice che il numero a_n è infinitesimo, o che tende a 0, se ad ogni numero positivo ϵ corrisponde un numero ν tale che per $n > \nu$ sia sempre $|a_n| < \epsilon$ „.

" Si dice che a_n tende ad a, quando la differenza $a_n - a$ è infinitesima „.

L'unica obbiezione che si possa fare, è se convenga, oltre alla nomenclatura " $\lim x = 0$ „, di usare anche la equivalente " x è infinitesima „.

La definizione II contiene una variabile reale di meno che la I, poichè manca la lettera a. Ma il membro definiente contiene sempre tre lettere apparenti; e deve essere completata colla definizione successiva. Sicchè non c'è vantaggio della II sulla I.

Per definire la derivata, come limite del rapporto incrementale, bisogna aver definito il limite d'una funzione quando la variabile assume valori costituenti un gruppo qualunque di quantità, per esempio in un intervallo. I numeri costituenti un intervallo non sono disposti in successione, e per un celebre teorema di Cantor, non si possono disporre in successione. La definizione secondo il " Formulario „, pag. 232, è:

Definizione III.

$$u \epsilon \mathrm{Cls'q} . x \epsilon \delta u . f \epsilon \mathrm{qf} u . a \epsilon \mathrm{q} . \supset .\because a = \lim (f, u, x) . = : k \epsilon \mathrm{Q} . \supset_k . \exists \mathrm{Q} \frown h \ni [y \epsilon u \sim \iota x . \mathrm{mod}\,(y - x) < h . \supset_y . \mathrm{mod}\,(fy - a) < k].$$

" Sia u una classe di quantità (un gruppo o insieme di numeri), e sia x un elemento della classe derivata di u (cioè sia x infinitamente prossimo ad u differenti da esso). Sia f una quan-

tità funzione data pei valori u della variabile; e sia a una quantità determinata e finita. Allora diremo che a è il limite della funzione f, nel campo u, pel valore x, quando, comunque si fissi la quantità positiva k, si può fissare la quantità positiva h, in modo che comunque si fissi un valore y nel campo u, differente da x, ma tale che disti da x meno di h, sempre si ha $\mathrm{mod}\,(fy - a) < k$ „.

Questa definizione contiene nell'ipotesi, e nel membro definito, quattro lettere reali u, x, f, a; nel membro definiente, oltre alle stesse lettere reali, contiene le apparenti k, h, y, accompagnate rispettivamente dai simboli logici Ɔ, ∃, Ɔ.

Essa si trova in tutti i buoni trattati:

D'Arcais, *Calcolo infinitesimale*:

" Diciamo che l è il limite di y per x convergente ad a, pei valori di G, se dovremo solo considerare i valori del gruppo G, quando dato σ, possiamo determinare o sappiamo che esista in un intorno di a, pei punti x del quale sia:

$$|y - l| < \sigma \text{ „.}$$

Invece della nostra notazione $\lim\,(f, u, x) = a$, è più comune la

$$\lim_{z=x} f(z) = a,$$

la quale contiene una lettera apparente, e non necessaria z; in essa si scrive $z = x$, per dire " z assume tutti i valori, eccetto il valore x „, cioè proprio l'opposto di ciò che sta scritto; e infine la notazione comune non contiene la variabile reale u, cioè il campo di variabilità della variabile indipendente.

Anche le notazioni abbastanza diffuse:

$$\lim_{z=x+0} f(z) \quad \text{e} \quad \lim_{z=x-0} f(z)$$

per dire:

$$\lim\,[f, u \cap (x + \mathrm{Q}), x] \quad \text{e} \quad \lim\,[f, u \cap (x - \mathrm{Q}), x],$$

difettano della variabile reale u; e sono contrarie alle notazioni dell'algebra elementare, secondo cui $x + 0 = x - 0 = x$.

La definizione III è un po' più lunga, ma non più complicata della definizione I. Arzelà tentò di far dipendere la III

dalla I, dicendo: " noi diremo che $\lim(f, u, x) = a$, quando comunque si prenda una successione $y_1\, y_2 \ldots$ di valori appartenenti alla classe u, e vergenti ad x, il limite della successione $f(y_1)\, f(y_2) \ldots$ è a ". Ma per dimostrare l'equivalenza di questa definizione colla III e per dedurre i teoremi sui limiti, è necessario ammettere che si possano scegliere ad arbitrio infiniti elementi; il che non è lecito.

***

Alcuni autori invece di dire " comunque si prenda la quantità positiva h " dicono " comunque piccola si prenda h ", o " essendo h un quantità piccolissima, arbitrariamente piccola, ecc. ". Quest'aggiunta non è necessaria; ed è un pleonasmo. In modo simile si dovrebbe dire " per m sufficientemente grande " e " per n comunque grande ". Le due prime aggiunte si trovano in:

Grassi, *Preparazione matematica allo studio della chimica fisica*, 1912, pag. 7:

" Tutte le volte che dato un numero ϵ *piccolo ad arbitrio* si possa trovare un valore di n *abbastanza grande* perchè il termine ennesimo della successione e tutti i seguenti siano in valore assoluto inferiore ad ϵ si dirà che la successione ha per limite lo zero, oppure che il termine generico a_n di essa è infinitesimo col tendere di n all' ∞ ".

È probabile che qualche studioso, nel leggere queste definizioni, si domanderà che cosa sia una quantità comunque piccola, o sufficientemente piccola, e potrà arenarsi, prima di accorgersi che quegli aggettivi sono pleonasmi. Io credo conveniente di sopprimere tutti i pleonasmi. La matematica brilla per la sua semplicità.

***

Una variante alla definizione di limite si trova in alcuni autori:

Arzelà, *Calcolo infinitesimale*:

" Se assegnato a piacere un numero positivo σ, comunque piccolo, si può sempre trovare nella successione uno dei termini che sia, esso e tutti i successivi, in valore assoluto inferiore a σ si dirà che la successione tende al limite zero ".

Qui si dice " si può trovare un termine, che coi successivi ", invece di dire " si può trovare un posto, un indice, tale che coi successivi ". Ora, dato l'indice, è determinato il termine; ma non viceversa; poichè se la corrispondenza fra posto e termine non è univoca, uno stesso termine può occupare più posti.

Per esempio, ogni termine della serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\dots$$

è pure termine della serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$$

tuttavia, la somma della prima non è minore della somma della seconda, come dice chi confonde i termini cogli indici.

***

La prima definizione di limite, in cui si trovano le tre variabili apparenti (h, m, n della I), scritte nell'ordine voluto, e di cui si fanno le precise affermazioni universale, particolare, e universale, è, secondo le mie ricerche, di Ossian Bonnet, del 1871 (" Formul. ", pag. 232).

Nei tempi precedenti (e anche in autori successivi) o manca qualche lettera, o le variabili apparenti sono permutate.

Ebbe grande diffusione la forma adottata da Serret, *Calcul différentiel* (3ème éd., 1886): " La différence puisse devenir et demeurer constamment inférieure à une quantité donnée quelconque ".

Qui le tre variabili apparenti m, n, h sono espresse dalle parole " devenir ", " demeurer ", " quantité donnée ".

La generazione precedente invece studiò la definizione di Duhamel, *Cours d'Analyse* (2ème éd., 1847): " Nous appelons limite d'une variable une quantité constante dont la variable approche indéfiniment sans jamais l'atteindre ".

Secondo questa definizione, il limite del poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di raggio 1, è il quadrato di lato 2, poichè l'area del poligono si va avvicinando senza fine,

senza raggiungerlo mai. E il limite del pendolo oscillante in un mezzo resistente, cioè della funzione $\frac{\sin x}{x}$ per x infinito, non è la posizione d'equilibrio, perchè la raggiunge infinite volte, avvicinandosi ed allontanandosi alternativamente.

***

È noto che si possono commutare due segni $\supset$ successivi: " se per ogni m si ha che per ogni n, si ha ecc. " significa " se per ogni n si ha che per ogni m, si ha ecc. ". E si possono pure commutare due $\exists$ successivi " se si può fissare m, in modo che si può fissare n " significa " se si può fissare n in modo che si può fissare m ". Ma i segni $\supset$ $\exists$ non si possono commutare.

La proposizione:

$$x \epsilon Q . \supset_x . \exists Q \frown y \ni (y < x).$$

" Se x è una quantità positiva, si può determinare una quantità positiva y tale che si abbia $y < x$ " è vera. Commutando si ha:

$$\exists Q \frown y \ni (x \epsilon Q . \supset_x . y < x).$$

" Si può determinare una quantità positiva y, tale che se x è una quantità positiva, si abbia $y < x$ " che è falsa.

Cioè " data una quantità, si può trovare una quantità minore ", ma non è vero che " si possa trovare una quantità minore di ogni data quantità ".

Se nella definizione I, ci permettiamo di portare h dopo m ed n, si ha la relazione fra a ed x:

$$\exists N_1 \frown m \ni [n \epsilon N_1 . \supset_n : h \epsilon Q . \supset_h . \operatorname{mod}(x_{m+n} - a) < h].$$

" Si può determinare un ordine m, in modo che qualunque sia l'indice $m + n$, successivo ad m, la differenza $x_{m+n} - a$ sia sempre in valore assoluto minore della quantità positiva prefissata h ".

Essa evidentemente si riduce alla proposizione con due sole lettere apparenti:

$$\exists N_1 \frown m \ni (n \epsilon N_1 . \supset_n . x_{m+n} = a).$$

Questa relazione fu da me indicata colla scrittura $a = \text{fine}\, x$, in un articolo *Sugli ordini degli infiniti*, " R. Accad. dei Lincei ", 16 giugno 1910. Questi fini delle funzioni hanno notevoli proprietà; la loro introduzione nell'insegnamento professionale pare prematura. Basta il constatare che, mutando il posto di h, si ottiene un ente tutto diverso.

Scambiando l'ordine delle lettere m ed n, si ha la nuova relazione fra a ed x:

$$h \epsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_h : n \epsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \supset_n \,.\, \exists\, \mathrm{N}_1 \cap m \ni [\mathrm{mod}\,(x_{m+n} - a) < h]$$

che nel " Formulario " è indicata col simbolo $a \epsilon \mathrm{Lm}\, x$, " a è un elemento della classe limite di x:

" Qualunque si sia la quantità positiva h, ed il numero n, sempre posso determinare un numero m, tale che la differenza fra x_{m+n} ed a risulti in valore assoluto minore della quantità che abbiamo prefissata in h ".

Questa classe limite d'una funzione si trova chiaramente in Cauchy, anno 1821; poi andò giù di moda, e fu sostituito col teorema che una funzione non può avere che un limite solo (il che è vero o falso, secondochè per limite intendiamo uno dei simboli lim o Lm); da alcuni anni ritornano in uso il massimo e il minimo della classe limite, col nome di " estremi di indeterminazione ".

Le tre lettere h, m, n sono suscettibili di 6 permutazioni; unendo ad ognuna di esse o il segno $\supset$ di proposizione universale, o il segno $\exists$ della particolare, si ottengono 48 proposizioni, ognuna delle quali contiene le affermazioni:

$$h \epsilon \mathrm{Q} \,.\, m \epsilon \mathrm{N}_1 \,.\, n \epsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{mod}\,(x_{m+n} - a) < h.$$

Una di esse è la definizione di limite; le altre 47 esprimono altri enti.

***

Siccome in Francia già si sono introdotte le derivate nelle scuole secondarie, il Borel, uno dei matematici viventi più illustri, pubblicò un libro ad uso delle scuole, col titolo: *Algèbre, second cycle*, 1905.

Ivi, a pag. 309, si definisce la derivata, senza aver prima definito il limite:

" On appelle dérivée d'une fonction y ce que devient l'expression du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction y à l'accroissement correspondant de la variable x, lorsque dans ce rapport exprimé au moyen de x et de Δx, on remplace Δx par zéro ".

Questa definizione è notoriamente illusoria; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando al posto di Δx si ponga zero, assume la forma $\frac{0}{0}$, che non ha senso; dando a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, prima di porre $\Delta x = 0$, altre forme, può avvenire che in alcune di queste si ottenga il limite ponendo $\Delta x = 0$; ma si possono dare altre forme, per es. la primitiva, in cui il limite non si ottiene colla semplice sostituzione. Durante una generazione, gli analisti, invece di dire limite, dissero " valor vero " della funzione. Secondo questa nomenclatura, la derivata è il " valor vero " di $\Delta y/\Delta x$, per $\Delta x = 0$, senza essere il " vero valore " di questo rapporto.

Nello stesso trattato scolastico l'autore, più avanti, a pagina 321, definisce il limite:

" Étant donnée une fonction y d'une variable x, on dit que y a pour limite b lorsque x tend vers a, lorsque l'on peut prendre x assez voisin de a pour que y diffère de b aussi peu que l'on veut ".

Ma questa non è la definizione del valor limite o " lim " del " Formulario ", bensì quella della classe limite " Lm ". Così, per prendere l'esempio dato da Cauchy nel 1821, la funzione $\sin\frac{1}{x}$ della variabile x, ha per limite 0, e 1, e -1, quando x tende a 0; poichè si può prendere x assai vicino a 0, dandogli la forma $1/(N_1\pi)$, per cui $\sin\frac{1}{x}$ vale 0, che è il solo valore differente da 0 di tanto poco quanto si vuole.

M. Jules Tannery è l'autore di pregiati libri di analisi per l'insegnamento superiore; e questi libri sono mirabili per il rigore, la chiarezza e la semplicità dei mezzi; qualità che generalmente trovansi riunite. La definizione di limite vi è più volte data in modo preciso; per es. nelle *Leçons d'algèbre et d'analyse*, 1906:

" Dire que u_n a pour limite A, c'est dire que quelque petit que soit le nombre positif ϵ, on peut lui faire correspondre un nombre naturel p tel que la valeur absolue de la différence entre A et u_n soit moindre que ϵ, pourvu que n soit plus grand que p ", ove si presentano le tre variabili apparenti ϵ, p, n, nell'ordine voluto, colle condizioni necessarie.

Lo stesso Autore pubblicò, per uso della " Classe de philosophie " dei licei di Francia, un libro *Notions de Mathématiques* (Paris, senza data, ma dev'essere del 1906), già tradotto in tedesco da Klaess. Questo libro a pag. 210 definisce la tangente ad una curva come il limite della secante (cioè dà la definizione comune), senzachè prima sia definito il limite; questo anzi è solo definito a pag. 304. E il limite definito 100 pagine più tardi è il limite d'un numero, non è il limite d'una figura, come una retta, un piano, un cerchio; nè si estende immediatamente, perchè non si può dire che la differenza fra le due rette, o fra i piani, sia infinitesima. Inoltre l'autore ammette l'esistenza del limite, il che non si deve ammettere. La derivata è il limite del rapporto incrementale. Quindi se esiste il limite del rapporto, esiste la derivata; se non esiste quello, non esiste questa. Chi dice invece " la derivata è il limite, *se esiste*, del rapporto incrementale " fa una complicazione, non solo inutile, ma contraria alle convenzioni ordinarie: con questa aggiunta, non sonvi più funzioni senza derivata.

E a pag. 305 così il libro definisce il limite:

" Dire que $f(x)$ a pour limite A_0 lorsque la variable tend vers x_0, c'est dire que la différence $f(x) - A_0$ est en valeur absolue plus petite que tel nombre positif que l'on voudra, pourvu que la différence $x - x_0$ soit, elle même, suffisamment petite en valeur absolue ".

In questa definizione vediamo le tre variabili apparenti, indicate colle parole " tel nombre positif que l'on voudra ", colla lettera x, e poi con un " suffisamment petite ". Ma l'ultima è poco chiara, e non sono nell'ordine voluto. Come un lettore, non abituato a correggere le prove tipografiche, non rileva gli errori di stampa, che sono invece rilevati da chi impara a leggere; così chi conosce la definizione di limite, crede di leggere nelle linee precedenti la definizione solita. Ma uno studente intenderà probabilmente la proposizione alla lettera. Con questa

definizione dimostrerò che il limite di x^2, per x tendente a 0, vale 1. Infatti o la differenza $x^2 - 1$ è nulla, ed allora essa è minore in valore assoluto d'ogni numero positivo che si voglia; poichè dire che è un numero minore in valor assoluto di ogni numero positivo che si voglia è una frase elegante per dire numero nullo. In tal caso x sarà $= \pm 1$, e questi valori saranno sufficientemente piccoli in valore assoluto. Ovvero $x^2 - 1$ non è nullo, perciò la piccolezza di x non è sufficiente.

* * *

Colla parola *limite* si intendono in matematica idee differenti che nel " Formulario „ sono distinte coi simboli:

$$\mathrm{l}' \quad \mathrm{l}_1 \quad \lambda \quad \eth \quad \mathrm{Lm} \quad \mathrm{lim}.$$

I primi quattro operano su classi, gli ultimi due su funzioni. L'ultimo, indicato col simbolo lim, e nella cui definizione occorrono tre variabili apparenti, è quello che è necessario per la definizione generale di derivata.

Ma in matematica elementare si studia la tangente ad una circonferenza, l'area, l'arco, i volumi e le superficie dei solidi di rivoluzione; e le definizioni e teoremi relativi si trovano già in gran parte in Euclide. Ivi, ciò che occorre, non è già il limite d'una funzione " lim „, ma bensì la prima idea, rappresentata dal simbolo " l′ „ cioè " limite superiore „ d'una classe.

Perciò si può studiare fin dove si arriva colla sola nozione di limite superiore.

Richiamo anzitutto la definizione di *massimo*, idea simile al limite superiore (" Formul. „, pag. 46):

$$u \in \mathrm{Cls}'\mathrm{N}_1 . \supset \therefore x = \max u . = : x \in u : y \in u . \supset_y . y \leqq x.$$

" Se u è una classe di numeri naturali (a cui possiamo limitarci, o di numeri reali, se si preferisce), allora dire che x è il massimo degli u significa dire che x è un elemento della classe u; e che inoltre, comunque si prenda y nella classe u, sempre si ha $y \leqq x$ „.

In modo analogo si definisce il *minimo*.

Il membro definiente contiene una sola lettera apparente y.

Data una classe (gruppo, insieme) di numeri reali, allora il " limite superiore „, secondo Guilmin nel 1847, " obere Grenze „ di Weierstrass, " massimo ideale „ di Jordan e di Pringsheim, si definisce così (" Formul. „, pag. 116):

$$u \in \mathrm{Cls}'\mathrm{q} \,.\, \supset .\, \mathrm{l}'u = \min \mathrm{q} \cap x \ni [y \in u \,.\, \supset_y .\, y \leqq x].$$

" Data una classe u di quantità, per limite superiore degli u s'intende la più piccola quantità x tale che comunque si prenda y in u, sempre si abbia $y \leqq x$ „.

Il membro definiente contiene il simbolo " minimo „ ora definito, e inoltre una variabile apparente y; sostituendo il simbolo " minimo „ mediante la sua definizione, si avrà, come nel " Formul. „, t. I, pag. 59:

$$u \in \mathrm{Cls}'\mathrm{q} \,.\, a \in \mathrm{q} \,.\, \supset \therefore a = \mathrm{l}'u \,.=:\, x \in u \,.\, \supset_x .\, x \leqq a : y \in \mathrm{q} \,.\, y < a \,.\, \supset_y .\, \exists\, u \cap z \ni (y < z).$$

" Sia u una classe di quantità, e sia a una quantità determinata e finita. Allora dire che a è il limite superiore degli u, vuol dire: che ogni elemento x della classe u soddisfa alla condizione $x \leqq a$; e che se y è una quantità minore di a, allora esiste un u e z tale che $y < z$ „.

Il membro definiente è l'affermazione simultanea di due proposizioni, di cui una contiene la lettera apparente x, e l'altra due lettere apparenti y e z. La parte aritmetica si riduce a disuguaglianze della forma $y < z$.

La definizione di limite superiore d'una classe è più semplice di quella di limite d'una funzione; perchè nella prima la proposizione più complicata contiene due variabili apparenti, mentre la seconda ne contiene tre.

In modo analogo si definisce il limite superiore infinito e il limite inferiore. Le definizioni sono tutte scritte nel " Formulario „.

Allora si ha un teorema esistenziale:

$$u \in \mathrm{Cls}'\mathrm{q} \,.\, \supset .\, \mathrm{l}'u \in \mathrm{q} \cap \iota \pm \infty.$$

Ogni classe di quantità ha sempre un limite superiore determinato, finito o infinito „.

Se si vuol eliminare l'infinito, la stessa proposizione assume la forma:

$$u \in \mathrm{Cls}'\mathrm{q} \,.\, \exists u \,.\, m \in \mathrm{q} \,.\, \sim \exists u \cap (m + \mathrm{Q}) \,.\, \supset .\, \mathrm{l}'u \in \mathrm{q} \,.\, \mathrm{l}'u \leqq m .$$

" Dato il gruppo u, effettivamente esistente (cioè non vuoto), se m è una quantità tale che non esista alcun u maggiore di m, allora il limite superiore degli u è una quantità determinata e finita, e precisamente minore di m „.

Invece, data una successione, o funzione, non sempre esiste il limite; e la condizione affinchè questo limite sia determinato e finito, è complicata.

***

La proposizione sull'esistenza del limite superiore delle classi di numeri reali si riduce subito a quella per le classi di numeri razionali e, se vogliamo, positivi:

$$u \in \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, \exists u \,.\, m \in \mathrm{R} \,.\, \sim \exists u \cap (m + \mathrm{R}) \,.\, \supset .\, \mathrm{l}'u \in \mathrm{Q}.$$

" Se u è una classe di razionali positivi, classe non vuota, e se c'è un certo numero razionale m, in modo che non esistano degli u maggiori di m, allora il limite superiore degli u è un numero reale (non necessariamente razionale) „.

E questa proposizione esistenziale dipende dalla definizione di numero reale, irrazionale compreso.

I matematici non sono tuttora d'accordo sulla definizione migliore degli irrazionali.

Comincio col richiamare la definizione Euclidea.

Euclide, nel libro V, dà la definizione, che porta il N. 5, e che io traduco:

" Nella stessa ragione quattro grandezze diconsi essere, la prima alla seconda e la terza alla quarta, quando equimoltiplici della prima e della terza insieme sono maggiori, o eguali o minori delle equimoltiplici della seconda e della quarta „.

Chiamiamo a, b, c, d le quattro grandezze, ed m e n i numeri secondo cui si fanno le equimoltiplici. Essa diventa:

" Date quattro grandezze a, b, c, d, diremo che $a/b = c/d$,

quando, essendo m ed n numeri naturali, se $ma > nb$, sarà $mc > nd$, se $ma = nb$ sarà $mc = nd$, se $ma < nb$ sarà $mc < nd$ „.

La ragione a/b di due grandezze è ciò che oggi si chiama " numero reale „, in simboli Q; la relazione $ma > nb$ si può scrivere $a/b > m/n$; la ragione di due interi m ed n oggi si chiama " numero razionale „.

Sicchè in linguaggio matematico moderno, la definizione Euclidea diventa:

" Dati due numeri reali x e y, diremo che $x = y$, quando, comunque si prenda il numero razionale z, se $x > z$, sarà anche $y > z$, se $x = z$ sarà $y = z$, se $x < z$ sarà $y < z$ „.

In simboli:

$$x\,, y \epsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset : x = y \,.=.\, \mathrm{R} \cap z \ni (z < x) = \mathrm{R} \cap z \ni (z < y).$$

" I due numeri reali x e y diconsi eguali, quando la classe dei razionali minori del primo coincide colla classe dei razionali minori del secondo „.

Ogni numero reale produce nella classe dei razionali una *sezione*, o *Schnitt* dei matematici tedeschi, o *coupure* dei francesi; dice la definizione Euclidea, che due numeri reali sono eguali, se ad essi corrisponde una stessa sezione.

Perciò la sezione dei numeri razionali, che individua un numero reale, popolarizzata da Dedekind nel 1872, che però già si trova in trattati precedenti, si può far rimontare ad Euclide.

Ciò che manca in Euclide, è l'affermazione che ad ogni sezione corrisponde un numero reale esistente. E ciò non si trova mai in Euclide, poichè le grandezze che egli considera sono tutte costruibili colla riga e compasso. Quindi Dedekind dice che se non esiste il razionale che produce quella sezione, noi creiamo " wir erschaffen „ un nuovo numero che ha quella proprietà.

Questa creazione di nuovi numeri presenta delle difficoltà. Alcuni autori ammettono la proposizione esistenziale precedente come un postulato, che alcuno, e a torto, chiama postulato di Dedekind. Ma questa proposizione esistenziale contiene l'ente nuovo " numero reale „ che si vuol definire; e perciò ha piuttosto i caratteri d'una definizione. E alcuni Autori la chiamano *definizione*, e scrivono " noi conveniamo che... „. Ora essa non ha la forma d'una definizione, poichè non è un'eguaglianza il

cui primo membro è il segno nuovo, che si definisce, ed il secondo è un gruppo di segni noti.

Invece di dire " distinguiamo tutti i razionali in due classi, in modo che ogni numero della prima sia minore d'ogni numero della seconda ", possiamo considerare una classe sola, la prima; poichè la seconda si ottiene dalla prima colla negazione. Questa classe unica fu considerata da Pasch, nel 1882, col nome di " segmento di razionali " o " segmento ", " Strecke ".

Il Pasch, ed altri autori, identificano il numero reale col segmento di razionali, e pongono ad esempio:

$$\sqrt{2} = \mathrm{R} \cap x \ni (x^2 < 2).$$

" $\sqrt{2}$ è l'insieme dei razionali positivi, il cui quadrato è minore 2 ".

Una chiara esposizione dei numeri reali, trattati come segmenti di razionali, fu fatta dal prof. Cipolla, dell'Università di Catania, nel " Periodico di Matematica ", anno 1910; e fu adottata in parecchi trattati.

Però, se c'è corrispondenza univoca fra segmento e numero reale, questi enti hanno proprietà diverse. Chi identifica numero reale col segmento, dovrà dire:

$1 \varepsilon \sqrt{2}$	invece di	$1 < \sqrt{2}$,
$\sqrt{2} \supset \sqrt{3}$	invece di	$\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

Il simbolo 1 rappresenterà tanto l'unità, quanto la classe delle frazioni proprie, di cui 1 è limite superiore.

La definizione Euclidea è una definizione per astrazione, ed io ritengo che così si debbano definire i numeri reali:

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\, x \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset .\, x < \mathrm{l}'u \,.=.\, \exists\, u \cap y \ni (x < y).$$

" Se u è una classe di razionali (positivi), ed x è un razionale, diremo che x è minore del limite superiore degli u, quando x è minore di qualche u ". Sicchè il segno l′ qui ha il valore di " qualche ". Poi si definisce l'eguaglianza, con Euclide:

$$u, v \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\supset :\, \mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v \,.=.\, \mathrm{R} \cap z \ni (z < \mathrm{l}'u) = \mathrm{R} \cap z \ni (z < \mathrm{l}'v),$$

e poi, con definizioni opportune, si introduce la somma, e le altre operazioni.

Le definizioni per astrazione hanno la forma:

$$\varphi x = \varphi y \,.=.\, p_{x,y}$$

ove φx è un nuovo ente; non si pone $\varphi x =$ espressione nota, ma bensì si definisce solo l'eguaglianza $\varphi x = \varphi y$, come equivalente ad una proposizione $p_{x,y}$ contenente le due variabili x ed y.

La più celebre definizione per astrazione è quella ora riportata di Euclide. Le definizioni di direzione (o punto all'infinito) d'una retta, o di potenza d'un insieme, e tante altre, sono definizioni per astrazione:

direzione di $a =$ direzione di $b \,.=.\,$ la retta a è parallela a b;

potenza dell'insieme $a =$ potenza di $b \,.=.\,$ si possono porre gli a e i b in corrispondenza univoca e reciproca.

Già il compianto prof. Pieri, e poi Russell e Burali-Forti, affermarono che ogni definizione per astrazione si può rendere nominale, ponendo:

$$\varphi x = y \ni (p_{x,y}),$$

cioè eguagliando φx all'insieme degli enti y che stanno nella relazione $p_{x,y}$ con x. Allora il numero reale diventa identico al segmento di razionali; il punto all'infinito è una stella di rette parallele; la potenza d'una classe è la classe delle classi che si possono mettere in corrispondenza univoca colla data.

Non negando la possibilità di fare ciò, io ne nego la convenienza. Queste definizioni nominali, oltre all'attribuire all'ente definito, limite superiore, punto all'infinito, potenza d'un insieme, le proprietà che esso ha, gli attribuiscono pure altre proprietà che esso non ha, secondo il linguaggio ordinario.

Dirò ancora due parole sulle *classi contigue*. Alcuni autori introducono la definizione:

$$a\,,\, b \,\epsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\supset.\, a \text{ è contigua a } b \,.=:\, x \,\epsilon\, a \,.\, y \,\epsilon\, b \,.\supset_{x,y}.\, x < y \,:$$
$$:\, h \,\epsilon\, \mathrm{R} \,.\supset_h.\, \exists\, (x;y) \,\epsilon\, (x \,\epsilon\, a \,.\, y \,\epsilon\, b \,.\, y - x < h).$$

“ Le due classi a e b diconsi contigue, quando ogni elemento di x della a è minore d'ogni elemento y della b; e inoltre, fissato ad arbitrio una quantità (razionale positiva) h, si può determinare un elemento x nella prima, e uno y nella seconda tali che $y - x < h$ „.

E si deduce che, se a e b sono classi contigue, allora esiste, nel campo dei numeri reali, il limite superiore degli a (o limite inferiore dei b).

Sotto l'aspetto del rigore, non c'è luogo ad obbiezione. Ma si può osservare che l'ente, di cui si afferma l'esistenza, dipende da una sola delle due classi contigue; quindi l'altra si può sopprimere. E che non c'è la corrispondenza univoca fra numero reale e coppia di classi contigue; ciò che può essere dimenticato non solo da studenti, ma anche da professori, poichè veggo stampato: “ il numero irrazionale è una coppia di classi contigue „.

***

La lunghezza d'un arco di curva fu definito dal Serret come “ il limite delle lunghezze delle poligonali inscritte in esso, quando il numero dei lati cresca indefinitamente, e ogni lato tenda a zero „.

Qui si parla del limite d'una funzione, non di una variabile, come sopra si è detto, ma bensì dei valori del parametro da cui dipendono le posizioni dei vertici; e questi valori crescono in numero indefinitamente. Sicchè quella definizione significa:

“ Dire che l'arco AB è eguale al segmento rettilineo CD, significa dire, che fissata una quantità positiva h, si può determinare una nuova quantità positiva k, in modo che ogni linea poligonale inscritta in AB, e di cui ogni lato sia minore di k, abbia una lunghezza compresa fra $\mathrm{CD} - h$ e $\mathrm{CD} + h$ „. E il dire per quali linee esista il segmento CD che verifica questa condizione, ossia quali linee sono rettificabili, non è cosa agevole.

Seguendo invece Archimede, diremo che la lunghezza d'un arco è “ il limite superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte in esso „.

Sicchè, con questa definizione “ dire che l'arco AB è eguale al segmento rettilineo CD, significa dire che, ogni poligono inscritto in AB è minore di CD, e che fissato un segmento CE minore di CD, esiste un poligono inscritto in AB e maggiore

di CE „. E risulta che ogni arco ha lunghezza finita od infinita, perchè sempre esiste il limite superiore d'una classe di grandezze.

Si vede così come l'introduzione del limite generale, invece dell'idea più semplice di limite superiore, abbia complicato una antica e semplice teoria. Libri più recenti, a furia di condizioni inutili, resero la definizione di arco, di una complicazione inverosimile.

L'area d'una figura piana, limitata da un contorno curvilineo qualunque, è il limite superiore delle aree dei poligoni inscritti in essa. Qui *inscritto* ha il significato etimologico di *scritto dentro*, se la figura non è convessa. Sarà l'area anche il limite verso cui converge l'area d'un poligono inscritto nella figura, quando il numero dei lati cresca indefinitamente, e ogni lato decresca indefinitamente? È chiaro che no.

Invece dei poligoni inscritti, si può parlare di poligoni circoscritti e del loro limite inferiore; nei casi più comuni si riconosce facilmente che questo limite inferiore coincide col limite superiore degli inscritti. L'insegnante delle scuole secondarie può tacere che potrebbe questa coincidenza non avvenire. Non è necessario che egli ammetta che questa coincidenza avviene sempre; non è necessario di costrurre la matematica sul falso.

L'equivalente analitico dell'area è l'integrale; e siccome l'area si definisce naturalmente come limite superiore, traducendo il linguaggio geometrico in analitico, si ottiene la definizione di integrale, mediante il solo concetto di limite superiore d'una classe, senza introdurre quello di limite d'una funzione. La definizione di integrale, che dipende dal limite d'una classe, è più semplice di quella di derivata, che dipende dal limite di una funzione; e storicamente l'integrale precede la derivata.

La somma d'una serie a termini positivi è il limite superiore delle somme d'un numero finito di suoi termini.

La base " e „ dei logaritmi naturali si può definire come il limite superiore dell'insieme dei valori assunti da $(1+1/n)^n$, quando n è un numero naturale qualunque (o anche reale e positivo). Si può anche definire come il limite inferiore della classe dei valori di $(1+1/n)^{n+1}$; e si ha così:

$$n \varepsilon N_1 . \supset . (1+1/n)^n < e < (1+1/n)^{n+1}.$$

Non è necessario, in un insegnamento secondario, di dire che e è anche il limite verso cui tende $(1 + 1/n)^n$ col tendere di n all'infinito; cioè di dire che, fissata ad arbitrio una quantità positiva (piccolissima) h, si può determinare un intero m, in guisa che per ogni n maggiore di m, si abbia un valor assoluto $e - (1 + 1/n)^n < h$.

Risulta dalle cose dette, che nelle definizioni di numero irrazionale, di lunghezza d'un arco, di area, di integrale, e in parecchie altre questioni di analisi, si presenta naturalmente il limite (superiore) d'una classe, e non il limite d'una funzione. Il primo contiene due variabili apparenti, ed il secondo ne contiene tre.

Ma la definizione di derivata, o di tangente ad una curva, o di velocità d'un punto (idee equivalenti, espressi con termini di analisi, o di geometria, o di meccanica), esige il concetto di limite d'una funzione, se si vuol dare in generale.

Perciò, volendosi dare questi concetti nelle scuole secondarie, si può ritornare ai metodi di 2000 anni fa; la tangente è la retta che *tange* la curva, cioè sta tutta da una parte della curva, o di un arco di curva. Si ha la tangente al circolo, ellisse, parabola, iperbole, spirale d'Archimede (già trovata da questo matematico) e delle principali curve. Restano esclusi i punti di flesso, e le curve non piane, il cui studio si può rimandare ai corsi superiori.

O anche, dopo aver utilizzato il concetto di limite d'una classe, si può anche fare il passo al limite di una funzione, il quale limite contiene una variabile di più che il precedente.

La permutazione della proposizione universale colla particolare, ossia lo scrivere ∃Ɔ volendosi dire Ɔ∃, non è raro in alcuni libri, producendo confusioni e anche errori, di cui darò pochi esempi.

È proposizione di aritmetica elementare, anzi è parte della definizione di numero naturale, la proprietà " dato un numero, esiste un numero più grande di esso „; commutando si ha la proposizione falsa " esiste un numero più grande di ogni numero dato „. Questo numero contradittorio in sè, dicesi da alcuni l'*infinito*; e siccome dall'assurdo consegue tutto, sia il vero che il falso, sopra questo infinito assurdo si pubblicarono volumi, e volumi si pubblicano tuttora.

Cauchy, *Analyse Algébrique*, 1821, a pag. 120, così ragiona: " Abbiasi una serie, i cui termini dipendono da una variabile x, e sia convergente per ogni valore di x in un certo campo. Allora dato x, si può prendere n così grande, che il resto della serie dopo n termini sia minore d'una quantità piccolissima ", e invertendo deduce: " si può prendere n così grande, che dato x, il resto delle serie dopo n termini sia minore della quantità piccolissima "; e quindi dedusse che la somma d'una serie, i cui termini sono funzioni continue d'una variabile, è pure funzione continua. Abel notò l'inesattezza di questa deduzione; oggi la serie che soddisfa alla prima condizione si dice di convergenza semplice; e di convergenza equabile se soddisfa alla seconda.

La così detta condizione necessaria e sufficiente per la convergenza delle serie diede luogo a divergenze.

Catalan, *Traité des séries*, 1860, pag. 4, dichiara *fausse* la proposizione seguente:

" Pour qu'une série soit convergente, la condition nécessaire et suffisante consiste en ce que la somme d'un nombre quelconque de termes au delà de u_n, soit aussi petite que l'on voudra, si n est suffisamment grand ".

Egli dice che questa proposizione si trova " par inadvertence, dans un fort bon traité ". E effettivamente essa si trova in Sturm e in una moltitudine di libri posteriori; e prima si trova, un po' più confusa, in Cauchy, *Analyse Algébrique*, p. 116, e in *Exercices de mathématique*, t. 2, p. 221:

" Pour qu'une série soit convergente il est nécessaire et il suffit que la différence $S_{n+m} - S_n = u_n + u_{n+1} + ... + u_n + u_{m-1}$ devienne infiniment petite, quand on attribue au nombre n une valeur infiniment grande, quel que soit d'ailleurs le nombre entier représenté par m ".

Il Catalan dà più esempi; il più semplice è questo. Considero la serie armonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$; il termine generale tende a zero; perciò anche la somma di 2, 3 termini, ed in generale la somma di m termini seguenti quello d'indice n tende a zero, col tendere di n ad infinito; pure la serie non è convergente.

Il Catalan attribuisce alla proposizione il senso seguente:

$$h \in \mathrm{Q} \,.\, m \in \mathrm{N}_1 \,.\, \supset_{h,m} \exists\, \mathrm{N}_1 \frown n \ni [\mathrm{mod}\, \Sigma\, (u\,,\, n \cdots (n+m)) < h]$$

la quale, necessaria per la convergenza, non è sufficiente. Invece Cauchy e i suoi seguaci intendevano:

$$h \in \mathrm{Q} \,.\, \supset_h \,.\, \exists\, \mathrm{N}_1 \frown n \ni [m \in \mathrm{N}_1 \,.\, \supset_m .\, \mathrm{mod}\, \Sigma\, (u\,,\, n \cdots (n+m)) < h]$$

che è condizione necessaria e sufficiente. Le due proposizioni contengono gli stessi elementi in ordine diverso.

Noterò che la frase " *la* condizione necessaria e sufficiente per la convergenza " può condurre qualche studente a credere che questa condizione sia unica.

" Condizione necessaria e sufficiente " d'una proposizione è ogni proposizione equivalente ad essa.

Quindi " condizione necessaria e sufficiente " affinchè una serie converga, è che converga, per il principio d'identità. Ovvero, per la definizione di convergenza, essa significa che la successione delle somme dei suoi termini abbia un limite (lim); ovvero, siccome il limite è l'unico valore della classe limite (Lm) della successione, la condizione si trasforma nell'altra che la classe limite della successione delle somme si riduca ad un solo valore; cioè che il massimo valore limite coincida col minimo, e così via, fino ad ottenere la condizione precedente, la quale però è di utilità scarsa.

Prima di Cauchy, il Bolzano nel 1817 enunciò la stessa regola per la convergenza d'una successione; essa è riprodotta nel " Formulario ", pag. 215; ma le variabili apparenti sono in disordine; sicchè la proposizione si può interpretare sia nel senso giusto che nel falso.

Ancora un esempio, dal Fine, *College Algebra*, 1905, libro del resto ottimo. Ivi, pag. 527, si legge:

" The positive series $u_1 + u_2 + \ldots$ is convergent if ratio of each of its terms to the immediately preceding term is less than some number r which itself is less than 1 ".

Obbietta uno studente: " Dire che il rapporto d'un termine al precedente è minore di un numero r minore di 1, vuol dire solo che questo rapporto è minore di 1; poichè ogni numero

minore di 1 è minore di infiniti numeri r minori di 1. Perciò l'ipotesi è " se il rapporto d'un termine al precedente è minore di 1", da cui non segue che " la serie è convergente ".

Risponde l'insegnante: " Ma quel numero r è fisso, costante ".

Replica lo studioso: " La parola *costante* è termine relativo, non assoluto; come è egualmente senza senso il dire che " 2 è maggiore " o " 2 è minore ", poichè 2 è maggiore di 1, ed è minore di 3; così è egualmente senza senso il dire che r è costante, quanto dire che r è variabile. Del resto, nella serie armonica $1 + 1/2 + 1/3 + ...$, il rapporto del secondo termine al primo è 1/2, minore di 2/3, quantità costante assoluta, perchè è un numero; e il rapporto del terzo termine al secondo vale 2/3, minore della costante assoluta 3/4; e così via; e la serie diverge ".

Allora l'insegnante modifica la proposizione, dicendo " minore d'un numero prefissato r minore di 1 "; ma questo " prefissato " significa " che non è stato prefissato ", " che ci siamo dimenticati di prefissare ". E siccome nella proposizione si sono fatte più affermazioni prima di dire $u_{n+1}/u_n < r$, secondochè noi prefissiamo r in un posto o nell'altro, la proposizione sarà giusta o falsa.

***

Confrontando i programmi proposti per le scuole italiane, con quelli francesi, del 31 maggio 1902, giudico migliori i nostri perchè più liberali. Nei programmi francesi è quasi imposto il metodo d'insegnamento. Vi si dice per esempio " problème inverse de la recherche de la dérivée ", il che indica che l'integrale si debba definire come l'inverso della derivata; mentre storicamente si ebbe lo sviluppo inverso; e la maggioranza dei trattati ora definisce direttamente l'integrale, senza passare per le derivate; e parecchi autori (Jordan, Arzelà, Vivanti) cominciano addirittura dall'integrale. Anche la frase del programma " en négligeant des quantités infiniment petites " indica un modo di esprimersi scomparso da molti libri, i quali non trascurano più gli infinitamente piccoli.

*
* *

In conclusione, colla parola *limite* (o *infinitesimo*, o altre equivalenti) si intendono in matematica idee diverse, quali il limite superiore d'una classe, ed il limite verso cui tende una funzione. E questa confusione ha prodotto equivoci, non solo fra gli studiosi, ma anche fra i matematici sommi. Il linguaggio ordinario è uno strumento imperfetto per enunciare delle proposizioni con più variabili apparenti. La cosa diventa più facile colla distinzione fra proposizioni universali e particolari, fatta dalla logica generale, e meglio ancora coi simboli equivalenti $\supset$ ed $\exists$ della logica matematica. Se l'insegnante delle scuole medie impiega la sua prima lezione a sviluppare tutto il formalismo della logica matematica, avrà uno strumento per spiegare in modo semplicissimo queste complicazioni. Altrimenti io temo che l'introduzione del limite delle funzioni (invece di quello delle classi) riproduca nelle scuole medie quella serie di confusioni, da cui si è a stento (e non completamente) liberato il Calcolo infinitesimale odierno.

Le questioni didattiche sono del massimo interesse, perchè ogni miglioramento produce un'economia di lavoro nella moltitudine degli studenti. Perciò esposi la mia opinione su questo soggetto; e sarebbe desiderabile che questa questione fosse più ampiamente discussa; e che qualcuno magari pubblicasse i capitoli che si dovrebbero aggiungere agli attuali trattati, per sviluppare i futuri programmi.

Tip. Vincenzo Bona - Torino — 1913